2°/a) $\forall x \in \mathbf{R}$, on a : $x^2+8>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>|x|$ or $|x| \geq x$ donc $\sqrt{x^2+8}>x$ d'où $\sqrt{x^2+8}-x>0$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)>0$.

b) on a $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)=-\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$ et $f(x)>0$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)<0$ et par suite $f$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

3°/a) $f$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ donc $f$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur l'intervalle $J=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+8}-x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+8}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-8-x^2}{\sqrt{x^2-8}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8}{\sqrt{x^2+8}+x}=0$

donc $J=]0,+\infty[$.

b) $f^{-1}:]0,+\infty[\to\mathbf{R}$

$$x \mapsto f^{-1}(x)=y$$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+8}-y=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+8}=x+y \Rightarrow$

$y^2+8=(x+y)^2 \Rightarrow y^2+8=x^2+y^2+2xy \Rightarrow y=\dfrac{8-x^2}{2x}$

donc $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f^{-1}(x)=\dfrac{8-x^2}{2x}$.

**Solution 6 :**

1°/ $f$ est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in ]1,+\infty[$,

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$.

| $x$ | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

2°/a) $f$ est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc $f$ réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\mathbf{R}$ et comme $0 \in \mathbf{R}$ donc 0 admet